Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 2
Séance 8-9

Résolution du système différentiel $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x = 0 \end{cases}$

Table des matières

L'objectif de cette séance est la résolution du système différentiel $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 & (1) \\ \frac{dy}{dt} - x = 0 & (2) \end{cases}$ avec les conditions initiales suivantes : $\begin{cases} x(t=0) = 1 \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$.

I. Méthodes analytique et algébrique

Nous allons voir ici 2 méthodes.

I.1. Différentiation et substitution

Partons de l'équation $\frac{dx}{dt} + y = 0$, et différencions là par rapport à t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ensuite nous allons substituons la valeur $\frac{dy}{dt}$ dans (2) par ce que nous venons de trouver grâce à (1) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

Nous reconnaissons ici l'équation d'un oscillateur harmonique simple dont la solution générale est :

$$x(t) = Acos(t) + Bsin(t)$$

De (1), on peut en déduire :

$$y(t) = Asin(t) - Bcos(t)$$

Les conditions initiales vont nous permettre de trouver A et B :

$$x(0) = Acos(0) + Bsin(0) = A = 1$$
$$y(0) = Asin(0) - Bcos(0) = -B = 0$$

On trouve donc que les solutions sont :

$$x(t) = cos(t)$$
$$y(t) = sin(t)$$

I.2. Avec les matrices

Nous ne rentrerons pas ici dans les détails, mais nous fournirons la méthode complète.
Nous allons reformuler le système à résoudre sous la forme matricielle : $X'(t) = AX(t)$ où $X(t)$ est le vecteur des fonctions inconnues $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 & (1) \\ \frac{dy}{dt} - x = 0 & (2) \end{cases}$$

peut se réarranger comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \quad (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x \quad (2) \end{cases}$$

Ainsi, il devient

$$X'(t) = AX(t)$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons les **valeurs propres** de A qui sont les solutions de l'équation caractéristique $det(A - \lambda I) = 0$:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Les valeurs propres sont i et $-i$.

Remarques :

- La méthode que nous avons vue permet de calculer les valeurs propres d'une matrice carrée 2×2.
- Si ce n'est pas une matrice carrée 2×2, il faudra trouver les valeurs λ telles que le système $(A - \lambda I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}$ admettent des solutions non nulles, cela peut être plus simple.
- Si une matrice A a autant de valeurs propres distinctes que la dimension de l'espace, alors A est diagonalisable.

Nous avons 2 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

Nous allons désormais calculer les **vecteurs propres** :
Pour chaque valeur propre λ, nous devons trouver le vecteur propre V en résolvant $(A - \lambda I)V = 0$.

Pour $\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -iv_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - iv_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = -iv_1$$

Le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = i$.

Pour $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} iv_1 - v_2 = 0 \\ v_1 + iv_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = iv_1$$

Le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = i$.

Nous obtenons 2 solutions :

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = \begin{pmatrix} e^{it} \\ -ie^{it} \end{pmatrix} \; et \; X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2 = \begin{pmatrix} e^{-it} \\ ie^{-it} \end{pmatrix}$$

La solution générale du système différentiel est une combinaison linéaire des solutions associées à chaque valeur propre :

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$$

Ainsi : $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} \\ -iC_1 e^{it} + iC_2 e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Rappel :
La formule d'Euler nous donne :

$$e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x$$

On a donc :

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) =$$

On a donc :

$$x(t) = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} = C_1(cos(t) + i\ sin(t)) + C_2(cos(t) - i\ sin(t))$$
$$= (C_1 + C_2)cos(t) + i(C_1 - C_2)sin(t)$$

$$y(t) = -iC_1 e^{it} + iC_2 e^{-it} = -iC_1(cos(t) + i\ sin(t)) + iC_2(cos(t) - i\ sin(t))$$
$$= i(-C_1 + C_2)cos(t) + (C_1 + C_2)sin(t)$$

Les conditions initiales $\begin{cases} x(t=0) = 1 \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$ nous donne :

$$x(0) = (C_1 + C_2)cos(0) + i(C_1 - C_2)sin(O) = C_1 + C_2 = 1$$
$$y(0) = i(-C_1 + C_2)cos(0) + (C_1 + C_2)sin(0) = -C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2$$

Ainsi,

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

On trouve finalement :

$$x(t) = cos(t)$$
$$y(t) = sin(t)$$

II. Méthode numérique

Une méthode courante pour trouver une solution approchée des équations différentielles est la méthode d'Euler ou les méthodes de Runge-Kutta. Ici, nous utiliserons la méthode d'Euler explicite pour illustrer une approche numérique.

Méthode d'Euler Explicite :
La méthode d'Euler explicite pour un système d'équations différentielles prend la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h.\dfrac{dx}{dt}(t_n, x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h.\dfrac{dy}{dt}(t_n, x_n, y_n) \end{cases}$$

En appliquant cela à notre système, on obtient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - h.y_n \\ y_{n+1} = y_n + h.x_n \end{cases}$$

On implémente cela, comme vu lors de la Méthode d'Euler explicite.

III. TP5 – Système différentiel

L'objectif de cette séance est la résolution du système différentiel $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 & (1) \\ \frac{dy}{dt} - x = 0 & (2) \end{cases}$ avec les conditions initiales suivantes : $\begin{cases} x(t = 0) = 1 \\ y(t = 0) = 0 \end{cases}$ par des méthodes numériques.

1. À l'aide du travail fait sur le schéma d'Euler explicite, résoudre ce système sur l'intervalle [0 ; 10] avec le choix du pas et l'affichage de la solution exacte et des approximations.

2. Faire de même avec le schéma de Runge-Kutta 4.